DIRECTION DE LA METEOROLOGIE NATIONALE
ECOLE NATIONALE DE LA METEOROLOGIE

CONCOURS EXTERNE 1986 D'INGENIEUR DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

EPREUVE DE MATHEMATIQUES (1) DUREE : 3 heures COEFFICIENT : 2

La notation prendra en compte la rigueur et la clarté des raisonnements et explications, ainsi que le soin apporté à la présentation.

PARTIE I

1) x étant une variable réelle, on considère les fonctions

$$(1)\quad L_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

a) Montrer que les $L_n(x)$ sont des polynômes de degré n, polynômes pairs si n est pair, impairs si n est impair. Donner le coefficient de x^n dans $L_n(x)$.

b) Calculer $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$.

2) a) Soient u et v deux fonctions de la variable réelle x, dérivables n fois. Montrer que :

$$(2)\quad (u\,v)^{(p)} = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \,.\, u^{(k)} \,.\, v^{(p-k)} \qquad \forall p \leq n$$

où $\forall m \in \mathbb{N}^*$ la notation $\varphi^{(m)}$ représente la dérivée d'ordre m de la fonction φ et où $\varphi^{(0)} = \varphi$.

b) en utilisant (2) montrer que $L_n(1) = 1$ et $L_n(-1) = (-1)^n \quad \forall n > 0$

3) On considère la fonction $w_n(x) = (x^2-1)^n$

a) Montrer que $w_n(x)$ vérifie une équation différentielle du premier ordre que l'on exprimera.

b) En déduire une équation différentielle du second ordre vérifiée par les polynômes $L_n(x)$ que l'on notera (3).

4) Montrer que

$$(4)\quad L'_n(x) = x\,L'_{n-1}(x) + n\,L_{n-1}(x) \qquad \forall n \geq 1$$

5) En utilisant (3) et (4) établir la relation

$$(5)\quad n\,L_n(x) = x\,L'_n(x) - L'_{n-1}(x) \qquad \forall n \geq 1$$

6) En utilisant (4) et (5) montrer que l'on obtient une relation de récurrence directe entre les trois polynômes $L_{n+1}(x)$, $L_n(x)$ et $L_{n-1}(x)$ pour tout $n \geq 1$.

PARTIE II

Dans cette partie x est un nombre réel donné et ρ désigne la racine positive du trinôme $t^2 + 2|x|t - 1$.

1) Montrer que $t^2 + 2|x||t| - 1 < 0$ pour $|t| < \rho$. En déduire que $|t^2 - 2xt| < 1$ et $t^2 - 2xt + 1 > 0$ pour $|t| < \rho$.

2) a) Montrer que la fonction $g(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2t.x + t^2}}$ est développable en série entière de t pour $|t| < \rho$.

b) Indiquer la nature de la convergence qui permet d'écrire le développement du a) sous la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x).t^n \quad \text{où les } Q_n(x) \text{ sont des polynômes de degré n.}$$

Quel est le coefficient de x^n dans $Q_n(x)$?

Calculer $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ et $Q_2(x)$.

3) a) calculer la quantité

$(1 - 2t\,x + t^2)\,g'(t) - (x - t)\,g(t)$

b) Du développement en série entière de t de cette quantité, déduire la relation de récurrence directe entre les trois polynômes $Q_{n+1}(x)$, $Q_n(x)$ et $Q_{n-1}(x)$ pour tout $n \geq 1$.

En déduire une relation entre $Q_n(x)$ et $L_n(x)$.

PARTIE III

1) On pose $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n \, dx$

Calculer I_n par récurrence.

2) a) Soit la fonction $w_n(x)$ du I) 3). Pour tout polynôme Q(x) de degré strictement inférieur à n, calculer l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} w_n^{(n)}(x).Q(x)\,dx$$

b) En déduire que

$$\int_{-1}^{1} L_n(x)\,L_m(x)\,dx = 0 \quad \text{pour tout couple d'entiers m et n tels que } m \neq n.$$

3) Calculer alors

$$\int_{-1}^{1} [L_n(x)]^2\,dx\ .$$
